Задание № 22 Производная функции

*Задание может быть выполнено либо в формате документа Word, либо в виде фотографии выполненного на бумаге решения.*

Правила вычисления производной явной функции

Теорема (производная и арифметические операции)

Если функции  и  имеют производные в точке , то их сумма, разность и произведение также имеют производную в той же точке и при этом

1) 

2) 

3) 

если, кроме того, , то функция  также имеет производную в точке  и

4) 

*Следствие*: Если С – постоянная, то 

*Доказательство*: 

Теорема (производная сложной функции)

Пусть функция  имеет в некоторой точке  производную, а функция  имеет производную в соответствующей точке . Тогда функция  будет иметь в точке  производную, равную .

Таблица производных

Для удобства пользования соберем производные основных элементарных функций в одну таблицу:

|  |  |
| --- | --- |
| Функция | Производная |
| (постоянная) |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

*Пример1*: Вычислить производные функций , , , , , 











*Пример 2*: Вычислить производную функции .

Чтобы можно было воспользоваться таблицей производных, теоремой о производных и арифметических операциях и теоремой о производной сложной функции, предварительно преобразуем выражение 

.

*Замечание (о степенно-показательных функциях):*

Для нахождения производной функции вида  необходимо предварительно преобразовать эту функцию к виду .

Производная функции, заданной параметрически

Рассмотрим линию , заданную параметрически: .

Вообще говоря, эта линия может не являться графиком функции. Допустим, что эту линию можно разделить точками  на конечное число линий , каждая из которых является графиком какой-либо функции.

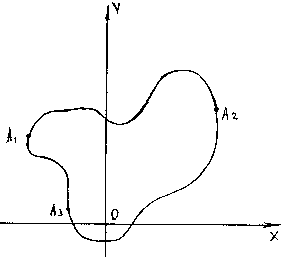


Рис. 64 Параметрически заданная функция

Тогда можно говорить, что на каждой из линий  уравнения  определяют некоторую функцию (на каждой линии – свою).

Пусть на какой-либо линии  функции  и  имеют производные и при этом функция  монотонна. Тогда существует обратная функция  и . По теоремам о производной сложной функции и о производной обратной функции

. Поскольку функция  была задана параметрически, то производную также естественно задать параметрически: .

*Пример:* Найти производную функции 

. Производная задается уравнениями .

Производная неявной функции

Рассмотрим уравнение  какой-либо линии на плоскости. Так же, как и в случае параметрически заданной линии, эта линия может не быть графиком функции. Будем предполагать, что эту линию можно разделить на участки, каждый из которых является графиком функции. Тогда можно говорить, что уравнение  задает одну или несколько функций. Такая функция называется неявной.

Поскольку , то, вычисляя производную от обеих частей этого равенства, получим .

*Замечание*: производную от левой части равенства  следует вычислять при предположении, что переменная  является функцией от переменной .

*Пример:* Найти производную неявной функции .

; ; ;

; ;

; ;



*Замечание*: в выражении для производной присутствует не только переменная , но и . Поскольку уравнение неявной функции может задавать не одну, а несколько функций, то этот факт является естественным, как бы «напоминая», что производная вычислялась сразу от нескольких функций.

**Самостоятельная работа:**

**1.** Найти производные функций

а) ; ; ; ; ; б) ; ; ; ; 

в) ; ; ;

г) ; ; ; ;

**2.** Найти производные функций

а) ; ; ; ; ; ;

б) ; ; ; ; ; ; ; ;

в) ; ; ; ; ; ;

г) ; ;;

д) ; ; ;

е) ; ; ; ;

1. Найти производные неявных функций: а) , б) , в) , г) 
2. Найти производные параметрически заданных функций: а) , 